Leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Rombaldi, Exercices ①
Rombaldi, Mathématiques pour agrégation ②
Dreveton - Lhabouz
Perrin (dev 2)
Gourdon (dev 1)

On considère $\mathbb{K}$ un corps (commutatif).

I. Actions par translation [Rom1]

1. Généralités

Définition 1.1 L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $(P, A) \longmapsto PA$ définit une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On l'appelle action par translation à gauche.

Définition 1.2 L'application $GL_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $(P, A) \longmapsto AP^{-1}$ définit une action appelée translation à droite.

Définition 1.3 On définit les matrices élémentaires :

- matrice de dilatation $D_i(\lambda) := I_n + (\lambda - 1) E_{i,i}$
- matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda) := I_n + \lambda E_{i,j}$, $i \neq j$
- matrice de permutation $P_{i,j} := I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$, $i \neq j$

Proposition 1.4 On a les correspondances suivantes :

$AD_i(\lambda)$	$AT_{i,j}(\lambda)$	$AP_{i,j}$	$D_i(\lambda)A$	$T_{i,j}(\lambda)A$	$P_{i,j}A$
$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$C_i \longleftrightarrow C_j$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \longleftrightarrow L_j$

2. Caractérisation des orbites

Théorème 1.5 Pour l'action par translation à gauche, deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même noyau.

Lemme 1.6 Soient $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\ker u \subset \ker v \Leftrightarrow \exists!\, w \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} u, \operatorname{Im} v)$, $v = w \circ u$.

Théorème 1.7 Pour l'action par translation à droite, deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même image.

Lemme 1.8 Soient $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ alors : $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u \Leftrightarrow \exists\, w : W \longrightarrow V$, $v = u \circ w$ où $V \oplus \ker u = E$ et $W \oplus \ker v = F$.

Théorème 1.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvection et les matrices de dilatation.
De plus, $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvection. développement 1

Application 1.10 Les groupes $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Application 1.11 Résolution de systèmes linéaires par pivot de Gauss.

II. Action de Steinitz [Rom1]

Définition 2.1 L'application $(GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $((P, Q), A) \longmapsto PAQ^{-1}$ définit une action de groupes qu'on appelle action de Steinitz.

Proposition 2.2 Deux matrices sont dans la même orbite pour l'action de Steinitz (on dit qu'elles sont équivalentes) si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Proposition 2.3 Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice $J_R = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Application 2.4 L'espace $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 2.5 Les orbites pour l'action par équivalence sont les ensembles $O_R := \{A \mid \operatorname{Rg} A = r\}$ où $r \in [\![0, \min(n,m)]\!]$. Le rang est un invariant pour cette action.

III - Action par conjugaison

1. Généralités [Rom1]

Définition 3.1 L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(P, M) \longmapsto PMP^{-1}$ définit une action, appelée action par conjugaison.

Deux matrices dans la même orbite sont dites conjuguées ou semblables.

Théorème 3.2 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables alors :

- $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$
- $\det A = \det B$
- $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} B$
- $\chi_A = \chi_B$
- $\pi_A = \pi_B$

Exemples 3.3

$A = 0$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont mêmes trace, déterminant, polynôme caractéristique mais ne sont pas semblables

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même rang mais ne sont pas semblables

2. Application à la réduction d'endomorphismes [Rom2]

Définition 3.4 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable (resp. diagonalisable) si elle est dans l'orbite d'une matrice triangulaire (resp. diagonale).

Théorème 3.5 La matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 3.6 Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable.

Théorème 3.7 La matrice A est diagonalisable si et seulement si π_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$.

Proposition 3.8 L'orbite de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable.

IV - Action par congruence

On suppose que car $(\mathbb{K}) \neq 2$.

1. Classification des formes quadratiques [Dre]

Lemme 4.1 Soient φ une forme bilinéaire sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E. Alors en notant A et A' matrices de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement.
Alors : $A' = {}^tPAP$ où $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

Remarque 4.2 C'est pour ça qu'on s'intéresse à l'action par congruence.

Définition 4.3 L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $(P, A) \longmapsto PA{}^tP$ définit une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, appelée action par congruence.

Proposition 4.4 Toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est congruente à une matrice diagonale.

2. Cas particuliers de corps [Dre]

Théorème 4.5 Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que A soit congruente à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Conséquence 4.6 Deux matrices $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont congruentes si et seulement si elles ont même rang.

Théorème 4.7 (Sylvester) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour toute $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe p, q tels que $p + q = \operatorname{Rg} A$ vérifiant $\begin{pmatrix} I_p & & (0) \\ & -I_q & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$ semblable à A.

Conséquence 4.8 Deux matrices $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes si et seulement si elles ont même rang et même p où $p : \varphi \longmapsto \max\{\dim F \mid F \subset E,\ \varphi(x,x) > 0\ \forall x \in F \setminus \{0\}\}$.

Théorème 4.9 Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ et $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$ non carré. Il y a deux classes de congruence : celle de $Q_1 := I_n$ et celle de $Q_2 := \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ (0) & & & \alpha \end{pmatrix}$.

Lemme 4.10 L'équation en x, y de $ax^2 + by^2 = 1$ avec $a, b \in \mathbb{F}_q^*$, a des solutions dans $\mathbb{F}_q$.

développement 2